## Zadanie 33. (4 *pkt*)

Punkty $A=(1,5)$, $B=(14,31)$, $C=(4,31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka *C* przecina prostą *AB* w punkcie *D*. Oblicz długość odcinka *BD*.

**<u>I sposób rozwiązania</u>**

Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y=2x+3$.

Wyznaczamy równanie prostej *CD*, prostopadłej do prostej *AB*: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Obliczamy współrzędne punktu *D*: $D=(12,27)$.

Obliczamy długość odcinka *BD*: $|BD|=2\sqrt{5}$.

**<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................1 pkt**

Wyznaczenie równania prostej *AB* (albo współczynnika kierunkowego *a* prostej *AB* albo współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$): $y=2x+3$ ($a=2$, $\overrightarrow{AB}=[13,26]$).

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....................................................................2 pkt**

Wyznaczenie równania prostej *CD*: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..................................................................3 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktu *D*: $D=(12,27)$.

**Rozwiązanie pełne .............................................................................................................4 pkt**

Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD|=2\sqrt{5}$ lub $|BD|=\frac{10}{\sqrt{5}}$.

**<u>II sposób rozwiązania</u>**

Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y=2x+3$.

Wyznaczamy równanie prostej *CD*, prostopadłej do prostej *AB*: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Obliczamy odległość punktu $B=(14,31)$ od prostej *CD* o równaniu $x+2y-66=0$:

$\frac{|14+2\cdot 31-66|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, więc $|BD|=2\sqrt{5}$.

**<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................1 pkt**

Wyznaczenie równania prostej *AB* (albo współczynnika kierunkowego *a* prostej *AB* albo współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$): $y=2x+3$ ($a=2$, $\overrightarrow{AB}=[13,26]$).

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....................................................................2 pkt**

Wyznaczenie równania prostej *CD*: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....................................................................3 pkt**
Zastosowanie wzoru na odległość punktu *B* od prostej *CD*: $\frac{|14+2\cdot 31-66|}{\sqrt{5}}$.

**Rozwiązanie pełne ...........................................................................................................4 pkt**
Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>
Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y = 2x+3$.

Obliczamy odległość punktu $C = (4,31)$ od prostej *AB* o równaniu $2x - y + 3 = 0$:

$|CD| = \frac{|2\cdot 4-31+3|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}$.

Obliczamy długość odcinka *CB*: $|CB| = 10$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CDB* obliczamy długość odcinka *BD*:

$\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$, więc $|BD| = 2\sqrt{5}$.

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .........................................................................................................1 pkt**
Wyznaczenie równania prostej *AB* : $y = 2x+3$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....................................................................2 pkt**
Obliczenie odległości punktu $C = (4,31)$ od prostej *AB* o równaniu $2x - y + 3 = 0$:

$|CD| = \frac{|2\cdot 4-31+3|}{\sqrt{5}}$ lub $|CD| = \frac{20}{\sqrt{5}}$ lub $|CD| = 4\sqrt{5}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....................................................................3 pkt**
Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CDB*: $\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$.

**Rozwiązanie pełne ...........................................................................................................4 pkt**
Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

<u>**IV sposób rozwiązania**</u>
Obliczamy długość odcinka *CB* oraz wysokość trójkąta *ABC* opuszczoną z wierzchołka *A*:
$|CB| = 10$, $h_A = 26$.

Obliczamy pole trójkąta *ABC*: $P_{ABC} = \frac{10\cdot 26}{2} = 130$.

Obliczamy długość odcinka *AB*: $|AB| = \sqrt{845}$.

Pole trójkąta *ABC* możemy zapisać: $P_{ABC} = \frac{|AB|\cdot|CD|}{2}$. Zatem $\frac{13\sqrt{5}\cdot|CD|}{2} = 130$.

Stąd $|CD| = 4\sqrt{5}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CDB* obliczamy długość odcinka *BD*:

$\left(4\sqrt{5}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$, więc $|BD| = 2\sqrt{5}$.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................1 pkt**

Obliczenie pola trójkąta *AB* : $P_{ABC} = 130$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .......................................................................2 pkt**

Obliczenie długości odcinka *CD*: $|CD| = 4\sqrt{5}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .......................................................................3 pkt**

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CDB*: $\left(4\sqrt{5}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$.

**Rozwiązanie pełne ..............................................................................................................4 pkt**

Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

**V sposób rozwiązania**

Obliczamy długości wszystkich boków trójkąta *ABC*: $|AB| = \sqrt{845}$, $|AC| = \sqrt{685}$, $|CB| = 10$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *CDB* i *ADC* zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} |CB|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 \\ |CA|^2 = \left(|AB| - |BD|\right)^2 + |CD|^2 \end{cases}$$

Wyznaczając $|CD|^2$ z pierwszego równania i podstawiając do drugiego równania otrzymujemy:

$\left(\sqrt{685}\right)^2 = \left(\sqrt{845} - |BD|\right)^2 + 10^2 - |BD|^2$.

Stąd $|BD| = 2\sqrt{5}$.

**Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................1 pkt**

Obliczenie długości wszystkich boków trójkąta *ABC*: $|AB| = \sqrt{845}$, $|AC| = \sqrt{685}$, $|CB| = 10$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .......................................................................2 pkt**

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} |CB|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 \\ |CA|^2 = \left(|AB| - |BD|\right)^2 + |CD|^2 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .......................................................................3 pkt**

Zapisanie równania z niewiadomą *BD*: $\left(\sqrt{685}\right)^2 = \left(\sqrt{845} - |BD|\right)^2 + 10^2 - |BD|^2$.

**Rozwiązanie pełne ....................................................................................................4 pkt**

Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \dfrac{10}{\sqrt{5}}$.